# COURS[1]
# Algèbre linéaire 2

Prof. AKEKE E. D.

1. Université des Lagunes, Licence 2 Maths, 2021-2022

# Table des matières

# Chapitre 1

# QUELQUES RAPPELS

## 1.1 Somme de sous-espaces vectoriels

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ et $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$. On pose

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = \{\, u \in E \,/\, \exists\, (u_1, \cdots, u_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n, \quad u = u_1 + \cdots + u_n \,\}.$$

**Proposition 1.1.1** *$E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*
*C'est le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$.*
*C'est par définition le sous-espace de $E$, somme des sous-espaces $E_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

**Preuve**
Posons $F = E_1 + E_2 + \ldots + E_n$. Il est clair que $F$ est un sous-ensemble de $E$.
i) On a

$$0_E = \underbrace{0_E + 0_E + \ldots + 0_E}_{n fois}$$

et nous savons que $0_E \in E_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, donc $0_E \in F$,
ii) Soient $\lambda \in K$ et $u$, $v \in F$. Alors $u$ s'écrit $u = u_1 + \cdots + u_n$ avec $u_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$. le vecteur $v$ s'écrit $v = v_1 + \cdots + v_n$ avec $v_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, $u_i + \lambda\, v_i \in E_i$ car $E_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$. On a

$$u + \lambda\, v = \sum_{i=1}^{n} (u_i + \lambda\, v_i)$$

avec $u_i + \lambda\, v_i \in E_i$ donc $u + \lambda\, v \in F$.

**Définition 1.1.1** *La somme $F = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ est dite* ***directe*** *si*
$\forall\, u \in F$, *il existe un* ***unique*** *n-uplets* $(u_1, \ldots, u_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ *tel que*

$$u = u_1 + \cdots + u_n$$

*On écrit alors $F = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$.*

*Si $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$, on dit que le $K$-espace vectoriel $E$ est* ***somme directe*** *des sous-espaces $E_1, E_2, \ldots, E_n$.*

**Proposition 1.1.2** *La somme $F = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ est* ***directe*** *si et seulement si*

$$\forall\,(u_1, \ldots, u_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \quad u_1 + \cdots + u_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, i = 1, \ldots, n, \quad u_i = 0.$$

Preuve (Exercice !)

## Sous-espaces supplémentaires*

**Définition 1.1.2** *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $E_1$, $E_2$ deux sous-espaces vectoriels distints de $E$.*
*On dit que $E_1$ et $E_2$ sont des* ***sous-espaces supplémentaires*** *de $E$ si $E = E_1 \oplus E_2$, c'est à dire que pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $u = u_1 + u_2$.*

**Proposition 1.1.3** *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $E_1$, $E_2$ deux sous-espaces de $E$. Alors*

$$E = E_1 \oplus E_2 \quad \Leftrightarrow \quad E = E_1 + E_2 \quad \text{et} \quad E_1 \cap E_2 = \{0\}.$$

Preuve
Supposons $E = E_1 \oplus E_2$. Il est évident que $E = E_1 + E_2$. Soit $u \in E_1 \cap E_2$. Alors $u \in E_1$ et $u \in E_2$. On a $0_E + u = u + 0_E$. L'unicité de l'écriture dans $E_1 \oplus E_2$ implique que $u = 0_E$, donc $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Réciproquement, supposons $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Pour tous vecteurs $u_1 \in E_1$, $u_2 \in E_2$ tels que $u_1 + u_2 = 0_E$, on a $u_1 = -u_2$. Donc $u_1 \in E_1 \cap E_2$. Comme $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ alors $u_1 = 0_E$ et $u_2 = 0_E$. La somme $E_1 + E_2$ est donc directe.

**Exemples**

1) $E = \mathbb{R}^2$. Posons $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $w = (1, 1)$

- les deux sous-espaces vectoriels $F_1 =< e_1 >$ et $F_2 =< e_2 >$ sont supplémentaires dans $E$. En effet, tout vecteur $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique sous la forme $v = x\, e_1) + y\, e_2$.
- les deux sous-espaces vectoriels $F_1 =< e_1 >$ et $F_3 =< w >$ sont supplémentaires dans $E$. En effet,
  i) $\forall\, v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $v == (x - y)e_1 + y\, w \in F_1 + F_3$.

  ii) pour tout $u \in F_1 \cap F_3$, on a $u \in F_1$ et $u \in F_3$. Il existe alors $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $u = x(1, 0)$ et $u = y(1, 1)$. On a donc

  $$x\,(1, 0) = y\,(1, 1),$$

  c'est à dire $(x, 0) = (y, y)$. Il s'ensuit que $x = y$ et $y = 0$. D'où $u = 0$. Par conséquent $F_1 \cap F_3 = \{0\}$.

2) Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $e = (0, 0, 1)$. Les sous-espaces vectoriels $F = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ et $G =< e >$ sont supplémentaires.

**Remarque 1.1.1** *Lorsque $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, pour prouver que $F \cap G = \{0_E\}$, il suffit de montrer l'implication $u \in F \cap G \Rightarrow u = 0_E$. L'autre implication étant évidente puisque, $F \cap G$ étant un sous-espace vectoriel de $E$, il contient le vecteur nul de $E$.*

**Exercice 1.1.1** *On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.*
*a) Montrer que les sous-ensembles $\mathcal{P}$ des fonctions paires et $\mathcal{I}$ des fonctions impaires sont des sous-espaces-vectoriels de $E$.*
*b) Montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans $E$.*

**Exercice 1.1.2** *Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $P$ un élément non nul de $E$. Montrer que les sous-ensembles*

$$F = \{\, Q \in E / \, deg(Q) < deg(P)\,\} \quad et \quad G = \{\, Q \in E \,/ \exists\, M \in E,\, Q = P\, M\}$$

*sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}[X]$.*

**Théorème 1.1.1** *Soit $E$ un $K$-espace vectoriel. Alors tout sous-espace vectoriel de $E$ admet au moins un supplémentaire dans $E$.*

## 1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

### 1.2.1 Notion de dimension

**Définition 1.2.1** *Un $K$-espace vectoriel $E$ est dit de* ***dimension finie*** *s'il est engendré par un nombre fini d'éléments de $E$. Autrement dit, l'espace vectoriel $E$ est de dimension finie s'il existe des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de $E$ tels que tout vecteur de $E$ s'écrive comme combinaison linéaire des vecteurs $v_i$, $i = 1, \dots, n$.*
*Dans le cas contraire, on dit que $E$ est de dimension infinie.*

**Théorème 1.2.1** *Tout espace vectoriel $E$ de dimension finie admet au moins une base. Plus précisement, toute famille génératrice finie de $E$ admet au moins une sous-famille qui est une base de $E$.*

**Théorème 1.2.2** *Soit $E$ un espace vectoriel. Alors toutes les bases de $E$ ont* ***le même nombre d'éléments****.*

**Définition 1.2.2** *Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle* ***dimension*** *de $E$ le nombre de vecteurs dans une base quelconque de $E$.*
*Ce nombre est noté $\dim_K E$ (ou $\dim E$ si aucune confusion sur le corps de base $K$ n'est à craindre).*
*Si $E$ n'est pas de dimension finie, on dit que $E$ est de dimension infinie.*

**Exemples**

Soit $K$ un corps commutatif.
1) En examinant les bases canoniques des $K$-espaces vectoriels $K^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on constate que

$$\dim_K K^n = n$$

Cet exemple est excessivement important !

2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dim_K K_n[X] = n + 1$.

3) L'espace vectoriel $K[X]$ est de dimension infinie.

**Remarque 1.2.1** *On a $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, de même $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$. Ce qui nous montre que le corps de base est d'une importance fondamentale dans le calcul de la dimension d'un espace vectoriel.*

**Théorème 1.2.3** *(de la base incomplète)*
*Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie,* $\dim E = n$*. Si $(v_1, \ldots, v_p)$ est un système de vecteurs libres de $E$ tel que $p < n$ alors il existe des vecteurs $w_1, \ldots, w_q$ de $E$ tels que $n = p + q$ et $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q)$ soit une base de $E$.*

### 1.2.2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

**Théorème 1.2.4** *(du sous-espace) Soit $E$ un espace vectoriel et $F$ un sous-espace de $E$. On suppose que $E$ est de dimension finie. Alors*
*i) $F$ est de dimension finie*
*ii) On a l'inégalité* $\dim F \leq \dim E$*.*
*iii)* $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$ *(fondamental !).*

On dispose aussi de la **formule de Grassmann** suivante.

**Théorème 1.2.5** *Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et soient $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On a la relation*

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

**Corollaire 1.2.1** *Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $E_1$ et $E_1$ deux $K$-sous-espaces vectoriels de $E$ dont la somme est directe. Alors on a la relation.*

$$\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

*De plus si $\mathcal{B}_1$ est une base de $E_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de $E_2$ alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $E_1 \oplus E_2$*

**Corollaire 1.2.2** *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension **finie** et $E_1, E_2, \ldots, E_p$ des $K$-sous-espaces vectoriels de $E$.*
*La somme $E_1 + E_2 + \ldots + E_p$ de sous-espace vectoriel de $E$ est **directe** si et seulement si*

$$\dim(E_1 + E_2 + \ldots + E_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$$

*Dans ce cas, si pour $i = 1, \ldots, p$, $\mathcal{B}_i$ est une base de $E_i$, alors $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ est une base de $E_1 + E_2 + \ldots + E_p$.*

**Exercice 1.2.1** *Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1,0,1,0)$, $v = (0,1,-1,0)$, $w = (1,1,1,1)$, $x = (0,0,1,0)$, $y = (1,1,0,-1)$. Soient $F =< u, v, w >$ et $G =< x, y >$. Quelles sont les dimensions de F, G, F+G ? En déduire la dimension de $F \cap G$.*

**Exercice 1.2.2** *Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel $E_1$ engendré par $\{x, y, z\}$ avec $x = (1,1,1,1)$, $y = (2,2,2,6)$, $z = (0,2,4,4)$ et le sous-espace vectoriel $E_2$ engendré par $\{u, v\}$ avec $u = (1,0,-1,2)$ et $v = (2,3,0,1)$. Calculer la dimension de $E_1 + E_2$.*

### 1.2.3 Notion de rang

**Définition 1.2.3** *Soit $E$ un $K$-espace vectoriel et $S = (v_1, \ldots, v_n)$ un système de vecteurs de $E$. On appelle rang de $S$, et on note $rg(S)$ la dimension du sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $S$. Autrement dit :*

$$rg(S) = \dim_K < v_1, \ldots, v_n > .$$

Cette définition a bien un sens puisque par construction même, $< v_1, \ldots, v_n >$ admet une famille finie de générateurs, il est donc de dimension finie.

**Définition 1.2.4** *Soient $E$, $F$ des $K$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Par définition, le rang de $f$, noté $rg(f)$, est*

$$rg(f) = \dim_K Im\, f.$$

**Théorème 1.2.6** *(Théorème du rang)*
*Soient $E$, $F$ des $K$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors on a*

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim Im(f)$$

*c'est à dire que* $\dim E = \dim \ker(f) + rg(f)$.

**Proposition 1.2.1** *Soient $E$, $F$ des $K$-espaces vectoriels de dimension finie tels que* $\dim E = \dim F$ *et $f : E \longrightarrow F$ une application $K$-linéaire. On a les équivalentes :*

$$f \quad \textit{est surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \quad \textit{est injective} \quad \Leftrightarrow \quad f\, \textit{est bijective.}$$

**Preuve**
Prouvons que $f$ surjective $\Rightarrow$ $f$ injective.
Suppposons $f$ surjective. Alors $Imf = F$. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim Im(f) \qquad (*)$$

Il s'ensuit que $\dim \ker(f) = 0$ (car $\dim E = \dim F$), d'où $\ker(f) = \{0_E\}$. l'application $f$ est donc injective.
Prouvons que $f$ injective $\Rightarrow$ $f$ bijective.
Supposons $f$ injective. Alors $\dim \ker(f) = 0$. La relation $(*)$ implique que $\dim E = \dim Im(f)$. Comme $\dim F = \dim E$ alors $Im(f) = F$. L'application $f$ est donc surjective. $f$ étant à la fois injective et surjective, elle est donc bijective.
Il est clair que $f$ est bijective $\Rightarrow$ $f$ est injective.
En somme $f$ surjective $\Leftrightarrow$ $f$ injective $\Leftrightarrow$ $f$ bijective.

### 1.2.4 Caractérisation des bases en dimension finie

On dispose des résultats importants suivants.

**Théorème 1.2.7** *Soit $E$ un $K$-espace vectoriel et $(v_1, \ldots, v_p)$ un système de vecteurs de $E$.*
*1) Si $(v_1, \ldots, v_p)$ est un système de vecteurs libres alors $p \leq \dim_K E$.*
*2) Si $(v_1, \ldots, v_p)$ est un système générateur de $E$ alors $p \geq \dim_K E$.*
*3) $(v_1, \ldots, v_p)$ est une base de $E$ alors $p = \dim_K E$.*
*4) Si $p > \dim_K E$ alors $(v_1, \ldots, v_p)$ est un sytème de vecteurs liés.*
*5) $(v_1, \ldots, v_p)$ libre et $p = \dim E$ $\Leftrightarrow$ $(v_1, \ldots, v_p)$ est une base de $E$.*
*6) $(v_1, \ldots, v_p)$ sytème générateur de $E$ et $p = \dim E$ $\Leftrightarrow$ $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une base de $E$.*

Preuve (cf. cours magistral)

**Exercice 1.2.3** *1) On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (-1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$. Montrer que $(v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
*2) Même question dans $\mathbb{R}^4$ avec les vecteurs*
$u_1 = (1, 2, -1, 2)$, $u_2 = (2, 3, 0, -1)$, $u_3 = (1, 2, 3, 4)$, $u_4 = (1, 3, -1, 0)$.

## 1.3 Matrice d'une appplication linéaire

**Théorème 1.3.1** *Soient $E$, $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
*Si $\dim E < +\infty$ alors toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est complètement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base quelconque de $E$.*

***Preuve***

*Soient* $n = \dim E$ *et* $\mathcal{B} = (\, e_1, \, \ldots, e_n)$ *une base de* $E$.
*Pour tout vecteur* $x \in E$, *on sait qu'il existe des scalaires* $x_1, \, \ldots, \, x_n \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k . \, e_k .$$

*Alors comme* $f$ *est une application linéaire on a*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k . f(\, e_k).$$

**Théorème 1.3.2** *Soient* $E$, $F$ *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels tels que* $\dim E < +\infty$ *(i.e* $E$ *est de dimension finie). Soit* $\mathcal{B} = (e_1, \, e_2, \ldots, e_n)$ *une base de* $E$ *et* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire. Alors l'image* $Im(f)$ *de* $f$ *est le sous-espace vectoriel de* $F$ *engendré par* $f(e_1), \, f(e_2), \, \ldots, \, f(e_n)$. *Autrement dit on a*

$$Im(f) = < f(e_1), \, f(e_2), \, \ldots, \, f(e_n) >;$$

**Preuve**

Il est évident que

$$< f(e_1), \, f(e_2), \, \ldots, \, f(e_n) > \subset Im(f)$$

car chaque $f(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$ est un élément de $Im(f)$ et $Im(f)$ est un sous-espace de $F$.

Pour tout $y \in Im(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Dans la base $\mathcal{B}$, le vecteur $x$ s'écrit

$$x = x_1 \, e_1 + x_2 \, e_2 + \ldots + x_n \, e_n$$

On a alors

$$f(x) = x_1 \, f(e_1) + x_2 \, f(e_2) + \ldots + x_n f(\, e_n) \in < f(e_1), \, f(e_2), \, \ldots, \, f(e_n) >$$

D'où $y \in < f(e_1), \, f(e_2), \, \ldots, \, f(e_n) >$.

En somme, on a

$$Im(f) = < f(e_1), \, f(e_2), \, \ldots, \, f(e_n) > .$$

**Définition 1.3.1** *Soient* $E$, $F$ *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension* ***finie***, $m = \dim E$ *et* $n = \dim F$, *et* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire. On note* $\mathcal{B} = (\, e_1, \, \ldots, e_m)$ *une base de* $E$ *et* $\mathcal{B}^{'} = (\, é_1, \, \ldots, é_n)$ *une base de* $F$.

*Pour tout $j = 1, \dots, m$, le vecteur $f(e_j)$ se décompose sur la base $\mathcal{B}'$, c'est à dire qu'il existe des scalaires $a_{ij}$, $i = 1, \dots, n$ tels que*

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \acute{e}_i.$$

*La matrice de type $(n, m)$* ***associée*** *à $f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et notée $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ est la matrice*

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = (a_{ij}), \qquad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

*C'est exactement la matrice de type $(n, m)$ dont le $j$-ème vecteur colonne est composé des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \acute{e}_1 \\ \vdots \\ \acute{e}_i \\ \vdots \\ \acute{e}_n \end{array}$$

*Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on note cette matrice $Mat_{\mathcal{B}}(f)$. C'est dans ce cas une matrice carrée, appelée la matrice de l'endomorphisme $f$ dans la base $\mathcal{B}$.*

**Exemple**

Soit $\mathcal{B} = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\acute{\mathcal{B}} = \{ \acute{e}_1, \acute{e}_2, \acute{e}_3, \acute{e}_4 \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
L'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, x - 2z, y + 5z, z + 3x)$ est une application linéaire. On a
$f(e_1) = (1, 1, 0, 3) = \acute{e}_1 + \acute{e}_2 + 3\,\acute{e}_4$.
$f(e_2) = (1, 0, 1, 0) = \acute{e}_1 + \acute{e}_3$.
$f(e_3) = (0, -2, 5, 1) = -2\,\acute{e}_2 + 5\,\acute{e}_3 + \acute{e}_4$.
La matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ est

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Remarque 1.3.1** *Soient $E$, $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension* ***finie****, $m = \dim E$ et $n = \dim F$, et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de $E$ et $\mathcal{B}' = (\acute{e}_1, \dots, \acute{e}_n)$ une base de $F$. On note $A = (a_{ij})$ la matrice de $f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $x \in E$ et $y = f(x)$.*

*On sait que le vecteur $x$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{m} x_i\, e_i$ dans la base $\mathcal{B}$ et le vecteur $y$ s'écrit $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \acute{e}_i$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

*Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne associé à $x$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne associé à $y$ alors*

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad Y = A\,X$$

*Autrement dit, on a*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

**Remarque 1.3.2** *Toute matrice $A$ de type $(n, m)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}^n$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$.*

**Théorème 1.3.3** *Soient $E$, $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires. On note $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $\mathcal{B}'$ une base de $F$. Si $A$ est la matrice assocée à $f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et $B$ est la matrice de $g$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ alors la matrice associée à $f + g$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est*

$$Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f + g) = A + B.$$

**Théorème 1.3.4** *Soient $E$, $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $\mathcal{B}'$ une base de $F$. Si $A$ est la matrice de $f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est alors la matrice de $\lambda\, f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est*

$$Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\lambda\, f) = \lambda\, A.$$

**Théorème 1.3.5** *Soient $E$, $F$, $G$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. On note $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $\mathcal{B}'$ une base de $F$ et $\mathcal{B}''$ une base de $G$.*
*Si $B$ est la matrice de $f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et $A$ est la matrice de $g$ relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ alors la matrice de $g \circ f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$ est*

$$Mat_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(g \circ f) = A\, B.$$

**Théorème 1.3.6** *Soient $E$, $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie,* $\dim E = m$, $\dim F = n$. *Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $\mathcal{B}'$ une base de $F$. Alors*
*l'application $\varphi : L_{\mathbb{K}}(E,F) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par $f \longmapsto M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

On en déduit que

$$\dim L_{\mathbb{K}}(E,F) = n\,m.$$

### 1.3.1 Matrices de passage

**Définition 1.3.2** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E$.*
*On note $\mathcal{B} = (\,e_1, \ldots, e_n)$ et $\acute{\mathcal{B}} = (\,\acute{e}_1, \ldots, \acute{e}_n\,)$ des bases de $E$.*
*On appelle* ***matrice de passage*** *de la base $\mathcal{B}$ à la base $\acute{\mathcal{B}}$ , la matrice $P$, carrée d'ordre $n$ dont la $j$-ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $\acute{e}_j$ dans la base $\mathcal{B}$, pour tout $j = 1, \ldots, n$.*

*Autrement dit si :*

$$\forall\, j = 1, \ldots, n, \quad \acute{e}_j = \sum_{i}^{n} p_{ij}\, e_i$$

*on a alors*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

**Exemple**
Soit $\mathcal{B} = (\,e_1, e_2, e_3\,)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs
$u = (1, 2, 3)$, $v = (-1, 3, 0), w = (1, 0, 1)$.
Alors $\acute{\mathcal{B}} = (\,u, v, w\,)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\acute{\mathcal{B}}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Théorème 1.3.7** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. La* ***matrice de passage*** *d'une base quelconque de $E$ à une base quelconque de $E$ est une* ***matrice carrée inversible****.*

**Théorème 1.3.8** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E$ et $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire. On note $\mathcal{B} = (\, e_1, \ldots, e_n\,)$ et $\acute{\mathcal{B}} = (\, \acute{e}_1, \ldots, \acute{e}_n\,)$ deux bases de $E$.*
*Si $A$ est la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ et $P$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ alors la matrice $A'$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$ est*

$$A' = P^{-1}\, A\, P$$

**Exercice 1.3.1** *Soit $\mathcal{B} = (\, e_1, e_2, e_3\,)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs $u = (1,2,3)$, $v = (-1,3,0), w = (1,0,1)$.*
*1) Montrer que $\acute{\mathcal{B}} = (\, u, v, w\,)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

*On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2\,x + z,\, x + 3\,y,\, x - 3\,z)$*

*2) Déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$*

*2) Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\acute{\mathcal{B}}$.*

*3) En déduire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

**Théorème 1.3.9** *Si $P$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est $P^{-1}$.*

**Théorème 1.3.10** *Soient $E$, $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **même dimension (finie)** et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $A$ une matrice quelconque de $f$. Alors*

$$f \quad \text{bijectif} \quad \Leftrightarrow \quad A \quad \text{inversible}$$

**Définition 1.3.3** *Deux matrices $A$ et $B$ de type $(n,m)$ sont dites **équivalentes** s'il existe une matrice inversible $R$ carrée d'ordre $n$ et une matrice inversible $S$ carrée d'ordre $m$, telles que*

$$B = R\, A\, S$$

**Remarque 1.3.3** *l'équivalence des matrices est une relation d'équivalence dans $M_{n,m}(\mathbb{K})$, i.e qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.*

**Définition 1.3.4** *Deux matrices $A$ et $B$ carrées d'ordre $n$ sont dites **semblables** s'il existe une matrice $P$ carrée inversible, d'ordre $n$ telle que*

$$B = P^{-1}\, A\, P$$

**Remarque 1.3.4** *Soient $A$, $B$, $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $P$ inversible. Alors*

$$B = P^{-1}\,A\,P \quad \Rightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad B^k = P^{-1}\,A^k\,P$$

Preuve (par récurrence)

### 1.3.2 Rang d'une matrice

**Définition 1.3.5** *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ une matrice.*
*On appelle* ***rang*** *de $A$ et on note $rg(A)$ le nombre maximal de vecteurs colonnes (de $A$) linéairement indépendants. Autrement dit, le rang de $A$ est la dimension du sous-espace vectoriel de $K^n$ engendré par les vecteurs colonnes de $A$.*

**Théorème 1.3.11** *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ on a*

$$rg(A) = rg({}^tA)$$

**Corollaire 1.3.1** *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ une matrice. Le rang de $A$ est la dimension du sous-espace vectoriel de $K^m$ engendré par les vecteurs lignes de $A$.*

**Remarque 1.3.5** *1) Le rang de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est exactement égal au rang de l'application linéare $f : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$ dont la matrice dans des bases de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ est $A$.*

*2) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ on a*

$$rg(A) \leq \min\{n,\, m\}$$

# Chapitre 2

# VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

Par la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les matrices les plus simples sont certainement les matrices diagonales et les matrices triangulaires supérieures (ou inférieures). Nous soulevons les 2 problèmes suivants.

**Problème 1** :
$f : E \longrightarrow E$ étant un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$, peut-on trouver une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ soit **diagonale** ?

**Problème 2** :
$f : E \longrightarrow E$ étant un endomorphisme de d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$, peut-on trouver une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ soit **triangulaire** ? (supérieure ou inférieure).

Dans ce cours, nous allons donner des conditions de diagonalisation des endomorphismes (des matrices carrées) et des conditions de trigonalisation. Notons que le problème 2 est susceptible d'un certain nombre de raffinements, pour lesquels on impose à la matrice d'être un peu plus que triangulaire.

**Définition 2.0.6** *Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de di-*

*mension finie* $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$. *On dit que $f$ est* ***diagonalisable*** *si l'on peut trouver une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale.*

**Définition 2.0.7** *Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie* $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$. *On dit que $f$ est* ***trigonalisable*** *si l'on peut trouver une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire.*

Analysons le problème 1. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ telle que la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ soit

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\forall\, i \in [[1, n]],\ f(e_i) = \lambda_i\, e_i$. On peut donc dire que si une telle base $\mathcal{B}$ existe, elle est alors formée de vecteurs $v \in E$ ayant la propriété suivante :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(v) = \lambda\, v.$$

## 2.1 Valeurs propres, vecteurs propres

**Définition 2.1.1** *Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. On appelle* ***vecteur propre*** *de $f$, tout vecteur $v \in E$ tel que $f(v)$ soit colinéaire à $v$, c'est à dire,*

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{K} \quad f(v) = \lambda\, v.$$

Notons que dans la définition précédente, il n'y a aucune restriction sur la dimension de l'espace vectoriel $E$.

**Définition 2.1.2** *Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est* ***valeur propre*** *de $f$ s'il existe un vecteur $v$ de $E$,* ***non nul*** *tel que $f(v) = \lambda\, v$.*

*On dit alors que $v$ est UN vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$ ou que $\lambda$ est LA valeur propre de $f$ associée au vecteur propre $v$.*

**Exemple**
Soit $E = \mathcal{C}^{+\infty}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions infiniments dérivalbes sur $\mathbb{R}$.
1) Soit $\phi : E \longrightarrow E$ l'application définie par $f \longmapsto f'$. Alors la fonction $g$ définie par $g(x) = \exp(5x)$ est un vecteur propre de $\phi$ et la valeur propre associée est $\lambda = 5$.

2) Soit $\psi : E \longrightarrow E$ l'application définie par $f \longmapsto f''$. Alors la fonction $h$ définie par $h(x) = \cos(-5x)$ est un vecteur propre de $\psi$ et la valeur propre associée est $\lambda = -25$.

**Définition 2.1.3** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. l'ensemble des valeurs propres de $f$ est appelé le **spectre** de $f$, souvent noté Spec$(f)$.*

**Remarque 2.1.1** *Comme $f(0) = 0$, le vecteur nul est toujours un vecteur propre de $f$ et de plus, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $f(0) = \lambda\, 0$. Dans ce cas, le scalaire dont on affirme l'existence peut être choisi arbitairement.*

*Supposons à présent que le vecteur $v$ soit un vecteur propre **non nul** de $f$. Alors le scalaire de la définition 2.1.1 est unique. En effet, si $f(v) = \lambda_1 v$ et $f(v) = \lambda_2 v$, on a alors $(\lambda_1 - \lambda_2)\, v = 0$, d'où $\lambda_1 = \lambda_2$ puisque $v \neq 0$.*

On peut donc énoncer la caractérisation suivante d'endomorphismes diagonalisables.

**Proposition 2.1.1** *Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n \neq 0$. Alors $f$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.*

Il est conseillé de connaître le contenu des exercices suivants.

**Exercice 2.1.1** *1) $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. On suppose que $\lambda$ est une valeur propre de $f$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\lambda^n$ est valeur propre de $f^n$ où $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.*

*2) $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. On suppose que $f$ est nilpotent ( c-à-d $\exists\, k \in \mathbb{N}^*$, $\quad f^k = 0$. Trouver les valeurs propres de $f$.*

*3) Soient $f, g$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. On suppose que $v$ est un vecteur propre de $f$ et de $g$. Montrer que $v$ est un vecteur propre de $f + g$ et de $f \circ g$. Dans* *le cas où $v$ est non nul, quelles sont les valeurs propres associées à $v$ pour $f+g$ et $f \circ g$.*

*4) $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Montrer que*

$$0 \quad \textit{est valeur propre de} \quad f \quad \Leftrightarrow \quad f \quad \textit{est non-injective.}$$

## 2.2 Sous-espaces propres

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire et $v \in E$. On a les équivalences suivantes.

$$f(v) = \lambda\, v \quad \Leftrightarrow \quad (f - \lambda\, id_E)\,(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v \in \ker(f - \lambda\, id_E).$$

On pose $E_\lambda = \ker(f - \lambda\, id_E)$. Ainsi, dire que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $f$ revient à dire que $E_\lambda \neq \{0\}$. D'autre part, $E_\lambda$ étant noyau d'endomorphisme de $E$, c'est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Proposition 2.2.1** *Soient $\lambda$ et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. On a*

$$\lambda \ \textit{valeur propre de} \ f \quad \Leftrightarrow \quad E_\lambda \neq \{0\}.$$

**Définition 2.2.1** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda$ est une valeur propre de $f$, le sous-espace $E_\lambda$ est appelé* ***sous-espace propre*** *de $f$ associé à la valeurs propre $\lambda$. On a*

$$E_\lambda = \{v \in E \,/\, f(v) = \lambda\, v\}.$$

**Remarque 2.2.1** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

$$\textit{Si} \quad \lambda \ \textit{est valeur propre de} \quad f \quad \textit{alors} \quad \dim E_\lambda \geq 1.$$

**Proposition 2.2.2** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*1) $\lambda$ est valeur propre de $f$.*
*2) $E_\lambda \neq \{0\}$*
*3) $(f - \lambda\, id_E)$ n'est pas injective*
*4) $(f - \lambda\, id_E)$ n'est pas bijective*

*5)* $\det(f - \lambda\, id_E) = 0$.

**Exercice 2.2.1** *1) Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Déterminer le spectre de $f$ et les sous-espaces propres de $f$.*

**Exercice 2.2.2** *1) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $g$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est*

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

*Déterminer le spectre de $g$.*

*2) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $h$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ est*

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

*Déterminer le spectre de $h$.*

**Exercice 2.2.3** *1) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $f$. Montrer que $E_\lambda$ est stable par $f$, c'est à dire $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$. A-t-on $f(E_\lambda) = E_\lambda$ ?*

*2) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, $f$, $g$ deux endomorphismes de $E$. On suppose que $f$ et $g$ commutent, i.e, $f \circ g = g \circ f$.*
*Montrer que tout sous-espace propre de $f$ (resp. de $g$) est stable par $g$ (resp. par $f$).*

*3) Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Caractériser les endomorphismes dont l'ensemble de vecteurs propres est un sous-espace vectoriel de $E$.*
*(On pourra utiliser une base de cet espace).*

Dans les exercices et dans le cas de faibles dimensions, on utilisera le plus souvent l'assertion 5) de la proposition 2.2.2 pour la recherche des valeurs propres. Ainsi, sera-t-il nécessaire de calculer $\det(f - \lambda\, id_E)$. D'où la définition suivante.

**Définition 2.2.2** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficient dans $\mathbb{K}$.*

*1) On appelle* ***vecteur propre*** *de $A$ toute matrice colonne $X$ (à $n$ lignes) pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que*

$$A\,X = \lambda\,X.$$

*2) On appelle* ***valeur propre*** *de $A$ toute scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe un vecteur colonne $X$,* ***non nul*** *tel que*

$$A\,X = \lambda\,X.$$

**Définition 2.2.3** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $A$ est diagonalisable si $A$ est* ***semblable*** *à une matrice diagonale,i.e, il existe une matrice carrée d'ordre $n$, $P$ inversible telle que $P^{-1}\,A\,P$ soit une matrice diagonale.*

**Remarque 2.2.2** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de $E$. Alors*

*1) $f$ est diagonalisable si, et seulement si, la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonalisable.*

*2) Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour toute matrice $A$ de $f$ dans une base quelconque de $E$ on a*

$$\det(f - \lambda\, id_E) = \det(A - \lambda\, I_n).$$

**Proposition 2.2.3** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
*(i) $\lambda$ est valeur propre de $A$*
*(ii) $A - \lambda\, I_n$ n'est pas inversible*
*(iii)* $\det(A - \lambda\, I_n) = 0$.

Preuve (exercice facile !).

C'est souvent le *(iii)* de cette proposition qui permettra de calculer les valeurs propres de la matrice $A$. On calculera à cet effet $\det(A - \lambda\, I_n)$ et on résoudra l'équation $\det(A - \lambda\, I_n) = 0$.

## 2.3 Polynôme caractéristique

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de $f$ dans une base quelconque de $E$.

Notons que le déterminant $\det(A - X\, I_n)$ ne dépend pas de la matrice $A$ de $f$. En effet, si $B$ est aussi une matrice de $f$ dans une base de $E$, on sait qu'il existe une matrice carrée inversible $P$ d'ordre $n$ telle que $B = P^{-1}\, A\, P$. Ainsi $A = P\, B\, P^{-1}$ et on a

$$\det(A - X\, I_n) = \det(P\, B\, P^{-1} - X\, I_n) = \det P\, \det(B - X\, I_n)\, \det P^{-1} = \det(B - X\, I_n).$$

## 2.3.1 Définitions

**Théorème-Définition 2.3.1** *Le déterminant* $\det(A - X\, I_n)$ *est un polynôme en* $X$*, c'est à dire un élément de l'anneau* $\mathbb{K}[X]$*.*
*Le polynôme* $P_A(X) = \det(A - X\, I_n)$ *est par définition le* ***polynôme caratéristique*** *de la matrice* $A$ *(resp. de* $f$*).*
*Le polynôme caractéristique de* $f$ *est intrinsèque. Il est souvent noté* $P_f(X)$*.*

**Exercice 2.3.1** *Soit* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ *une matrice carrée réelle. Déterminer les valeurs propres de* $A$*.*

### Notion de trace d'une matrice carrée

**Définition 2.3.1** *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée. On appelle trace de* $A$ *et on note* $Tr(A)$ *le scalaire*

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

### Propriétés de la trace

L'application trace définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ par $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est une forme $\mathbb{K}$-linéaire, c'est à dire à valeurs dans $\mathbb{K}$ et on a :

i) $\forall\, A,\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B).$

ii) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\, \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad Tr(\lambda\, A) = \lambda\, Tr(A).$

**Proposition 2.3.1** $\forall\, A,\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a l'égalité*

$$Tr(A\, B) = Tr(B\, A)$$

En effet, soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Notons $c_{ij}$ le terme général de la matrice $A\,B$. On sait que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj}$.
La trace de la matrice $A\,B$ est

$$Tr(A\,B) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{ki}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{ki}.$$

comme

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\,a_{ik}$$

alors

$$Tr(A\,B) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\,a_{ik}$$

Il n'est pas difficile de voir que le scalaire $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\,a_{ik}$ est bien la trace de la matrice $B\,A$ car $\sum_{i=1}^{n} b_{ki}\,a_{ik}$ est le terme situé à la $k$-ième ligne et à la $k$-ième colonne de la matrice $B\,A$ , d'où $Tr(A\,B) = Tr(B\,A)$.

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$. Par définition la trace de $f$ est la trace de la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.

**Proposition 2.3.2** *La trace d'un endomorphisme est intrinsèque, c'est à dire qu'elle ne dépend pas de la base choisie. Autrement dit, 2 matrices carrées semblables ont la même trace.*

Preuve
soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme. Soit $A$ la matrice de $f$ dans une base $B$ de E et $A^{'}$ la matrice de $f$ dans une autre base $\mathcal{B}^{'}$ de $E$. Notons $P$ la matrice de passage de la base $B$ à la base $B^{'}$. On sait que l'on a l'égalité

$$A^{'} = P^{-1}\,A\,P.$$

où $P$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}^{'}$. On a donc

$$Tr(A^{'}) = Tr(P^{-1}\,A\,P) = Tr(\,A\,P\,P^{-1}) = Tr(A).$$

### 2.3.2 Quelques coefficients du polynôme caractéristique

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

**Théorème 2.3.1** *Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de $A$ est un polynôme de degré $n$. Son coefficient dominant est $(-1)^n$, le coefficient du terme en $X^{n-1}$ est $(-1)^{n-1}\,Tr(A)$ et son terme constant est* $\det A$. *Ainsi, on a*

$$P_A(X) = (-1)^n\, X^n + (-1)^{n-1} Tr(A)\, X^{n-1} + \cdots + \det A.$$

*En particulier, pour $n = 2$ on a*

$$P_A(X) = X^2 - Tr(A)\, X + \det\, A.$$

**Remarque 2.3.1** *(important !) Considérons $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de* ***dimension finie*** *$n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Soit $A$ la matrice de $f$ dans une base de $E$. Supposons que le polynôme caratéristique de $f$ soit* ***scindé*** *dans le corps $\mathbb{K}$, c'est à dire qu'il est de la forme*

$$P_f(X) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X).$$

*Alors,*

*i) la trace de la matrice carrée $A$ est égale à la somme des valeurs propres de $A$ (comptées avec leur multiplicité !), i.e,*

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

*ii) on a l'égalité*

$$\det\, A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

## 2.4 Notion de polynôme annulateur

Soit $P(X) = a_m\, X^m + a_{m-1}\, X^{m-1} + \ldots + a_1\, X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.

**Définition 2.4.1** *On dit que $P(X)$ est un* ***polynôme annulateur*** *de l'endomorphisme $f$ de $E$ (resp. de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) si l'on a*

$$P(f) = 0 \qquad (\textit{resp.} \quad P(A) = 0)$$

*où $P(f) = a_m\, f^m + a_{m-1}\, f^{m-1} + \ldots + a_1\, f + a_0\, id_E$*
*(resp. $P(A) = a_m\, A^m + a_{m-1}\, A^{m-1} + \ldots + a_1\, A + a_0\, I_n$).*

Notons que l'ensemble $I_A$ des polynômes annulateurs de $A$ est le noyau de l'homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre $\psi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\psi(P(X)) = P(A)$ pour tout $P(X) \in \mathbb{K}[X]$. C'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par le **polynôme minimal** de $A$, l'unique polynôme unitaire de degré minimal contenu dans $I_A$.

**Théorème 2.4.1** ***(Caley-Hamilton)***
*Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ et $P(X)$ son polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique de $A$ est un polynôme* ***annulateur*** *de $A$. C'est à dire que l'on a*

$$P(A) = (-1)^n A^n + (-1)^{n-1} Tr(A) A^{n-1} + \cdots + \det(A) I_n = 0.$$

De même, on a :

**Théorème 2.4.2** ***(Caley-Hamilton)***
*Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de* ***dimension finie*** *$n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$ et $P(X)$ le polynôme caractéristique de $f$. Le polynôme caractéristique de $f$ est un polynôme* ***annulateur*** *de $f$. C'est à dire que l'on a*

$$P(f) = (-1)^n f^n + (-1)^{n-1} Tr(f) f^{n-1} + \cdots + \det(f)\, id_E = 0.$$

## 2.5 Propriétés des sous-espaces propres

**Proposition 2.5.1** *Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda$ est valeur propre de $A$ alors on a*

$$\dim E_\lambda = n - rg(A - \lambda I_n).$$

Preuve
Il suffit d'appliquer le théorème du rang, puisque $E_\lambda$ n'est autre que le noyau de $(A - \lambda I_n)$ ou $f - \lambda I$ où $f$ est l'endomorphisme dont la matrice est $A$.

**Proposition 2.5.2** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de* ***dimension finie*** *$n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Si $\lambda$ est une valeur propre de $f$ alors le sous-espace propre $E_\lambda$ est* ***stable*** *par $f$, c'est à dire $\forall v \in E_\lambda$, $f(v) \in E_\lambda$.*

Preuve (euhh ! laissée au lecteur)

**Théorème 2.5.1** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$, $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, des valeurs propres 2 à 2 distinctes de $f$. Alors la somme $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p}$ est une somme* ***directe*** *de sous-espaces de $E$.*

(**Attention !** Nous n'avons pas dit que cette somme est directe égale à $E$. Il s'agit en général, d'un sous-espace strict de $E$).

Preuve
Raisonnons par récurrence sur $p$.

(i) Si $p = 1$, c'est clair.

(ii) Cas $p = 2$.
Il suffit de montrer que $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$. Soit donc $x \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$. Alors $f(x) = \lambda_1 x$ et $f(x) = \lambda_2 x$. On a donc $\lambda_1 x = \lambda_2 x$. D'où $(\lambda_1 - \lambda_2) x = 0$. Or $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ d'où $x = 0$. La somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2}$ est donc directe.

(iii) Supposons le théorème démontré pour $p - 1$ sous-espaces propres et démontrons le pour $p$ sous-espaces propres.
Soit donc $x_i$, $i = 1, \ldots, p$ tels que $x_i \in E_{\lambda_i}$ et

$$x_1 + \cdots + x_p = 0 \qquad (*).$$

Alors $f(x_1 + \cdots + x_p) = 0$. On a ainsi

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0.$$

D'autre part, $\lambda_p x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0$. Ainsi

$$(\lambda_1 - \lambda_p) x_1 + \cdots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p) x_{p-1} + (\lambda_p - \lambda_p) x_p = 0$$

c'est à dire que

$$(\lambda_1 - \lambda_p) x_1 + \cdots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p) x_{p-1} = 0.$$

La somme $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_{p-1}}$ étant directe on a

$$(\lambda_i - \lambda_p) x_i = 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, p - 1.$$

Les valeurs $\lambda_i$, $i = 1, \ldots, p - 1$ étant 2 à 2 distinctes, on a

$$x_i = 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, p - 1.$$

Et d'après la relation $(*)$, on a $x_p = 0$. La somme $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p}$ est donc directe.

**Corollaire 2.5.1** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie,* $\dim E = n$, $f : E \longrightarrow E$ *un endomorphisme de $E$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres 2 à 2 distinctes de $f$ alors on a*

$$\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p} \leq n.$$

Preuve
C'est immédiat car la somme $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p}$ est une somme directe de sous-espaces vectoriels de $E$ et l'espace $E$ est de dimension finie, $\dim E = n$.

Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On sait que $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $\lambda$ est une racine du polynôme caratéristique $P_A(X) = \det(A - X\, I_n)$. Dans ce cas, le polynôme caractéristique de $A$ est de la forme

$$P_A(X) = (\lambda - X)^{\alpha}\, Q(X)$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\quad Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(\lambda) \neq 0$.

Par définition, l'entier $\alpha$ est appelé **la multiplicité** de la valeur propre $\lambda$ de la matrice $A$.

Si $\alpha = 2$ on dit que $\lambda$ est valeur propre double de $A$. Si $\alpha = 3$ on dit que $\lambda$ est valeur propre triple de $A$.

**Proposition 2.5.3** *Soit $A \in M_n(\mathbb{R}$ une matrice carrée d'ordre $n$. Si $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ alors le polynôme caratéristique $P_A(X)$ de $A$ est scindé dans le corps $\mathbb{K}$. Dans ce cas, il est exactement de la forme*

$$P_A(X) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$$

*où $\lambda_i$, $i = 1, \ldots, p$ sont les valeurs propres 2 à 2 distinctes de $A$ et $\alpha_i$ est la multiplicité de de la valeur propre $\lambda_i$ et $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = n$.*

(**Attention**! La proposition précédente donne une condition nécessaire de diagonalsation. Cette condition n'est pas suffisante).

**Théorème 2.5.2** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie,* $\dim E = n$, *$f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Si $\lambda$ est valeur propre de $f$ de multiplicité $\alpha$ alors on a toujours*

$$\dim E_\lambda \leq \alpha.$$

Preuve

Par l'absurde.

Supposons $\dim E_\lambda \geq \alpha + 1$. D'après le théorème de la base complète, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $E$ telle que $v_i \in E_\lambda$ pour $i = 1, \ldots, \alpha + 1$. (une telle base est obtenue en complétant une base de $E_\lambda$).
La matrice de $f$ dans cette base est une matrice carrée (notons-la $M$) d'ordre $n$, de la forme

$$M = \begin{pmatrix} D(\lambda) & C' \\ O & C \end{pmatrix}$$

où $D(\lambda)$ est la matrice diagonale d'ordre $\alpha + 1$,

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$(M - X\,I_n) = \begin{pmatrix} D(\lambda) - X\,I_{\alpha+1} & C' \\ O & C - X\,I_{n-\alpha-1} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique $P_f(X)$ de $f$ est alors

$$P_f(X) = \det(M - X\,I_n) = \det(D(\lambda) - X\,I_{\alpha+1})\,\det(C - X\,I_{n-\alpha-1}).$$

Ainsi

$$P_f(X) = (X - \lambda)^{\alpha+1}\,\det(C - X\,I_{n-\alpha-1}).$$

Où $\det(C - X\,I_{n-\alpha-1})$ est un polynôme en $X$ de degré $n - \alpha - 1$. Ce qui contredit le fait que la multiplicité de $\lambda$ est $\alpha$. On a donc $\dim E_\lambda \leq \alpha$.

On retiendra le résultat fondamental suivant.

**Théorème 2.5.3** *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $A$ est **trigonalisable** si et seulement si le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de $A$ est scindé sur $\mathbb{K}$.*

# Chapitre 3

# ENDOMORPHISMES (MATRICES) DIAGONALISABLES

## 3.1 Critères de diagonalisation

**Proposition 3.1.1** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de* ***dimension finie*** $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f : E \longrightarrow E$ *un endomorphisme de $E$. Alors $f$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.*

Preuve (euhh ! laissée au lecteur).

**Théorème 3.1.1** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de* ***dimension finie*** $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f : E \longrightarrow E$ *un endomorphisme de $E$. Si $f$ admet dans $\mathbb{K}$, $n$ valeurs propres 2 à 2 distinctes alors $f$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.*

Preuve
Supposons que $f$ admette $n$ valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, 2 à 2 distinctes. Soit $v_i \neq 0$ un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Alors $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de $E$ formée de vecteurs propres de $f$. D'où $f$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ .

**Attention !** La condition du théorème précédent est une condition suffisante de diagonalisation, mais pas nécessaire.

**Théorème 3.1.2** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de* ***dimension finie*** $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f : E \longrightarrow E$ *un endomorphisme de $E$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres 2 à 2 distinctes de $f$. Alors*

$$f \quad \textit{diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$

**Corollaire 3.1.1** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de* ***dimension finie*** $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f : E \longrightarrow E$ *un endomorphisme de $E$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres 2 à 2 distinctes de $f$. Alors*

$$f \quad \textit{diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \dim E = \dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p}.$$

Preuve

On a en effet,

$$\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p} \quad \Leftrightarrow \quad E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}.$$

**Théorème 3.1.3** *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre $n$ et $P_A(X)$ son polynôme caractéristique tel $P_A(X) = \prod_{i=1}^{p}(\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, p$ sont les valeurs propres 2 à 2 distinctes de $A$ et $\alpha_i$ est la multiplicité de la valeur propre $\lambda_i$. Alors*

$$f \quad \textit{diagonalisable dans} \quad \mathbb{K} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i = 1, \dots, p, \quad \dim E_{\lambda_i} = \alpha_i.$$

Preuve
Supposons $f$ diagonalisable. Alors $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ d'après le théorème 3.1.2. On a donc

$$n = \dim E = \dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p} \leq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = n.$$

Donc $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$. Par conséquent, on a

$$\sum_{i=1}^{p} (\alpha_i - \dim E_{\lambda_i}) = 0$$

d'où $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$ pour $i = 1, \dots, p$.

Réciproquement, supposons $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$ pour $i = 1, \dots, p$. Alors $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i} = n$. Le sous-espace $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ de $E$ est donc de dimension $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i} = n$, Forcement on a

$$E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} = E.$$

D'où $f$ est diagonalisable d'après le théorème 3.1.2 .

On retiendra de même le résultat important suivant.

**Théorème 3.1.4** *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée d'ordre* $n$ *et* $P_A(X)$ *son polynôme caractéristique tel* $P_A(X) = \prod_{i=1}^{p}(\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ *où* $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, p$ *sont les valeurs propres 2 à 2 distinctes de* $A$ *et* $\alpha_i$ *est la multiplicité de la valeur propre* $\lambda_i$. *Alors*

$$A \quad \textit{diagonalisable dans} \quad \mathbb{K} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{le polynôme} \quad m_A(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i) \quad \textit{est annulateur de} \quad A.$$

*Dans ce cas, la polynôme* $m_A(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ *est l'unique polynôme unitaire de* $\mathbb{K}[X]$ *de degré minimal, annulateur de la matrice* $A$. *(Souvent appelé le polynôme minimal de* $A$*).*

**Exercice 3.1.1** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. *Vérifier si* $A$ *est diagonalisable dans* $\mathbb{R}$.

**Exercice 3.1.2** *Soit* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. *Vérifier si* $B$ *est diagonalisable dans* $\mathbb{R}$.

**Exercice 3.1.3** *Soient* $(u_n)$ *et* $(v_n)$ *deux suites réelles définies par la relation de récurrence linéaire suivante*

$$\begin{cases} u_{n+1} = 6\,u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

*avec* $u_0 = 1$, $v_0 = 0$. *Déterminer le terme général de* $(u_n)$ *et le terme général de* $(v_n)$.

**Exercice 3.1.4** *Déterminer le terme général de la suite récurrente linéaire de sécond degré* $(u_n)$ *donnée par* $u_0 = 1$, $u_1 = -2$ *et* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\quad u_n = u_{n-1} + 4\,u_{n-2}$.

## 3.2 Trigonalisation

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$, $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

**Définition 3.2.1** *On dit que l'endomorphisme* $f$ *est* ***trigonalisable*** *dans* $\mathbb{K}$ *si il existe une base de* $E$ *dans laquelle la matrice de* $f$ *est triangulaire supérieure.*

**Définition 3.2.2** *On dit que la matrice* $A$ *est* ***trigonalisable*** *dans* $\mathbb{K}$ *si* $A$ *est semblable à une matrice triangulaire supérieure d'ordre* $n$, *à coefficients dans le corps* $\mathbb{K}$.

**Théorème 3.2.1** *L'endomorphisme $f$ est trigonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$, c'est à dire décomposable en produit de facteurs de degré 1 dans $\mathbb{K}[X]$.*

**Théorème 3.2.2** *La matrice carrée $A$ est trigonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$, c'est à dire décomposable en produit de facteurs de degré 1 dans $\mathbb{K}[X]$.*

**Corollaire 3.2.1** *Toute matrice carrée $A$ à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ est trigonalisable.*

En effet, le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, c'est à dire que tout polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ est décomposable en produit de facteurs de degré 1 dans $\mathbb{C}[X]$.

**Corollaire 3.2.2** *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors l'endomorphisme $f$ est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.*

**NB** : les 2 résultats ci-dessus sont faux pour $K = \mathbb{R}$.

**Remarque 3.2.1** *La trace d'une matrice trigonalisable est égale à la somme de ses valeurs propres* ***comptées avec le multiplicités****. Autrement dit, si $A$ est trigonalisable et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de $A$ comptées avec leur multiplicités alors*

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

En effet, 2 matrices carrées semblables ont la même trace.

## 3.3 Quelques applications de la réduction des matrices carrées

### 3.3.1 Calcul de la puissance $k$-ième d'une matrice carrée

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$, $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

**1) La matrice est diagonalisable**

La matrice $A$ est donc semblable à une matrice carrée diagonale $D \in M_n(\mathbb{K})$, c'est à dire qu'il existe une matrice carrée inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ d'ordre $n$ telles que

$$D = P^{-1}\,A\,P.$$

Pour tout entier naturel $k$ on a $D^k = P^{-1}\,A^k\,P$. Ce qui est équivalent à

$$A^k = P\,D^k\,P^{-1}.$$

Cette dernière relation permet de calculer $A^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**Exemple**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A^k$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

2) En déduire l'expression de la somme partielle $S_m = \sum_{p=0}^{m} A^p$ pour tout entier $m \in \mathbb{N}$.

3) Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on pose $T_m = \sum_{p=0}^{m} \frac{A^p}{p!}$.

Calculer

$$\lim_{m\to+\infty} T_m$$

Cette limite est souvent notée $e^A$.

(On rappelle que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = \lim_{m\to+\infty} \sum_{p=0}^{m} \frac{x^p}{p!}$)

**2) Via un polynôme annulateur**

On utilise souvent un polynôme annulateur de $A$ pour calculer les puissances de la matrice $A$.

Considérons un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré $m$ annulateur de la matrice $A$ ou de l'endomorphisme $f$ associé à $A$.

**Calcul de $A^k$ pour $k \geq m$, $k \in \mathbb{N}$.**

D'après la division euclidienne de $X^k$ par le polynôme $P(X)$, on sait qu'il existe des polynômes $Q(X)$, $R(X) \in \mathbb{K}$ tels que

$$X^k = Q(X)\,P(X) + R(X)$$

avec $deg\,R(X) < m$.

Il s'en suit que $R(X)$ est de la forme

$$R(X) = b_{m-1}\,X^{m-1} + b_{m-2}\,X^{m-2} + \ldots + b_1\,X + b_0.$$

En remplaçant $X$ formellement par la matrice $A$ (ou $f$), on obtiendra

$$A^k = P(A)\,Q(A) + b_{m-1}\,A^{m-1} + b_{m-2}\,A^{m-2} + \ldots + b_1\,A + b_0\,I_n$$

Comme $P(A) = 0$ on a

$$A^k = b_{m-1}\,A^{m-1} + b_{m-2}\,A^{m-2} + \ldots + b_1\,A + b_0\,I_n$$

Cette relation permet de calculer $A^k$ en fonction des puissances $A^j$ avec $0 \leq j \leq m-1$ où $m = deg\,(P(X))$.

(On calcule de même $f^k$ de la même façon).

**Remarque 3.3.1** *La méthode du polynôme annulateur s'applique en pratique avec le* ***poynôme minimal*** *ou* ***le polynôme caractéristique*** *qui est annulateur de A et de f. Cette méthode n'est intéressente que si le polynôme annulateur est de degré pas trop élévé.*

**Exercice 3.3.1** *1) Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. *Calculer* $A^n$ *pour tout entier* $k \in \mathbb{N}$.
*2) Soit* $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. *Calculer* $B^n$ *pour tout entier* $k \in \mathbb{N}$.

### 3.3.2 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

#### Systèmes homogènes

**Définition 3.3.1** *On appelle système différentiel linéaire homogène à coefficients constants un système de la forme*

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + \ldots + a_{1n}\,y_n \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + \ldots + a_{2n}\,y_n \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}\,y_1 + a_{n2}\,y_2 + \ldots + a_{nn}\,y_n \end{aligned} \right. \tag{3.1}$$

*Dans lequel les* $y_i$, $i = 1, \ldots, n$ *sont des fonctions définies continues dérivables de la variable réelle ou complexe* $x$ *et les* $a_{ij}$ $(1 \leq i,\, j \leq n)$ *sont des éléments donnés du corps commutatif* $\mathbb{K} = \mathbb{R}\; ou\, \mathbb{C}$. *Ce système s'écrit en abrégé*

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,y_j, \qquad 1 \leq i \leq n, \quad i \in \mathbb{N}.$$

### Interprétation matricielle

Considérons la matrice $A = (\alpha_{ij})$ avec $1 \leq i, j \leq n$ des coefficients du système dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Posons

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}$$

avec ces notations, on a

$$\frac{dY}{dx} = A\,Y \tag{3.2}$$

Le système (3.1) et l'équation matricielle (3.2) sont équivalents.

### Changement de base

Effectuons un changement de base défini par la matrice de passage $P$ et une nouvelle composante

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \qquad Y = P\,U \tag{3.3}$$

La matrice $A$ étant indépendante de la variable $x$, la matrice de passage $P$ est également indépendante de $x$ et on a la relation suivante

$$\frac{dY}{dx} = P\,\frac{dU}{dx} \tag{3.4}$$

et l'équation (3.2) s'écrit

$$P\,\frac{dU}{dx} = A\,P\,U$$

comme $P$ est inversible on a

$$\frac{dU}{dx} = P^{-1}\,A\,P\,U \tag{3.5}$$

on a ainsi

$$\frac{dU}{dx} = A'\,U \tag{3.6}$$

où $A' = P^{-1}\,A\,P$.

Nous distinguerons deux cas .

1) **La matrice $A$ est diagonalisable**

Alors, il existe une matrice diagonale $A'$ et une matrice inversible $P$ telle que $A' = P^{-1} A P$. Dans ces conditions la relation (3.6) s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = \lambda_1 u_1 \\ \dfrac{du_2}{dx} = \lambda_2 u_2 \\ \vdots \\ \dfrac{du_n}{dx} = \lambda_n u_n \end{cases}$$

Ce système se résoud facilement. On a

$$\begin{cases} u_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} \\ u_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ u_n = C_n e^{\lambda_n x} \end{cases}$$

où les scalaires $C_i$ sont des constantes arbitraires. On achève la résolution de l'équation en utilisant le changement de base défini par la relation (3.3).

**Exemple**

Résoudre le système

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2 y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -3 y_1 - 2 y_2 \end{cases}$$

**2) La matrice $A$ n'est pas diagonalisable**

On utilise une réduite triangulaire semblable. Exposons la méthode sur un exemple.

**Exemple**
Résoudre le système

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -y_1 + 2 y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2 y_1 + 3 y_2 \end{cases}$$

**Remarque 3.3.2** *Le lecteur est prié de s'informer de même sur les **Systèmes différentiels linéaires affines**.*

# Chapitre 4

# POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre $n$. On considère l'application

$$\varphi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

définie par $\varphi(P(X)) = P(A)$ pour tout $P(X) \in \mathbb{K}[X]$. Cette application vérifie les propriétés suivantes.

1) $\forall\, P,\, Q \in \mathbb{K}[X], \quad$ on a $\varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$

2) $\forall\, P,\, Q \in \mathbb{K}[X], \quad$ on a $\varphi(P.Q) = \varphi(P).\varphi(Q)$

3) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\, \forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad$ on a $\varphi(\lambda\, P) = \lambda\, \varphi(P)$

4) $\varphi(1) = I_n$.

Ce qui permet de dire que l'application $\varphi$ est un morphisme d'anneaux et un morphisme d'espaces vectoriels.
L'image $Im\varphi$ de $\varphi$ est à fois un $\mathbb{K}$-sous-espace de $M_n(\mathbb{K})$ et un sous-anneau commutatif de $M_n(\mathbb{K})$.

Soit $I_A$ le noyau de $\varphi$ (i.e, $I_A = \ker(\varphi)$). Alors $I_A$ est exactement égal à l'ensemble de tous les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ annulateurs de la matrice $A$. C'est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$. On a donc $I_A = T(X)\mathbb{K}[X]$ pour un certain polynôme $T(X)$.

Montrons que $I_A \neq \{0\}$.

Rappelons que $\dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$. Considérons les vecteurs $I_n$, $A$, $\dots, A^{n^2}$ de $M_n(\mathbb{K})$. On a $n^2+1$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n^2$. Ces vecteurs sont donc liés dans l'espace $M_n(\mathbb{K})$, c'est à dire qu'il existe des scalaires $a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}$, non tous nuls, tels que

$$a_{n^2}\, A^{n^2} + \cdots + a_0\, I_n = 0.$$

Le polynôme $P(X) = a_{n^2}\, X^{n^2} + \cdots + a_0$ est donc non nul, à coefficients dans $\mathbb{K}$, annulateur de $A$, donc élément du noyau $I_A$, d'où $I_A \neq \{0\}$.

(Notons que d'après le théorème de Caley-Hamilton le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est un élément de $I_A$).

Considérons à présent l'ensemble

$$\Delta = \{\, \deg(Q) \,/\, Q \in I_A,\ Q \neq 0 \,\}.$$

Alors $\Delta$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc $\Delta$ admet un plus petit élément dans $\mathbb{N}$. Il existe donc un polynôme $M(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$M(X) = \min\{\, \mathrm{degr}(Q) \,/\, Q \in I_A,\ Q \neq 0 \,\}.$$

L'idéal principal $I_A$ est engendré par $M(X)$. Quitte à multiplier $M(X)$ par l'inverse du coefficient du monône de plus haut degré, on peut supposer que le polynôme $M(X)$ est unitaire. C'est alors l'unique polynôme unitaire de degré minimal dans $I_A$, annulateur de la matrice $A$. Il est souvent noté $m_A(X)$.

**Définition 4.0.2** *Le polynoḿe* ***unitaire*** $m_A(X)$ *est par définition le* ***polynôme minimal*** *de la matrice $A$.*

**Proposition 4.0.1** *Le polynôme minimal $m_A(X)$ de la matrice carrée $A$ divise tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de $A$. En particulier, le polynôme minimal $m_A(X)$ de $A$ divise le polynôme caractéristique $P_A(X)$.*

On retiendra le résultat important suivant (confère Théorème 3.1.4, page 35).

**Théorème 4.0.1** *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Alors la matrice $A$ est* ***diagonalisable*** *dans $\mathbb{K}$ si et seulement si, son polynôme minimal $m_A(X)$ est* ***scindé simple*** *dans $\mathbb{K}$.*

**Remarque 4.0.3** *(très important !)*
*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini $n \neq 0$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$.*

*1) Tous les résultats précèdents subsistent si l'on considère l'application $\psi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow L_{\mathbb{K}}(E)$ définie par $P \longmapsto P(f)$ où $L_{\mathbb{K}}(E)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de $E$, qui a aussi une structure d'anneau.*

*Rappelons que $M_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à $L_{\mathbb{K}}(E)$.*

*2) L'image $Im\,\psi$ de $\psi$ est l'ensemble des **polynômes de l'endomorphismes** $f$ de $E$. C'est à la fois un $\mathbb{K}$-sous-espace de $L_{\mathbb{K}}(E)$ et un sous-anneau commutatif de $L_{\mathbb{K}}(E)$.*

*3) Si $A$ est la matrice de $f$ dans une base quelconque de $E$ alors le polynôme minimal $m_f(X)$ de $f$ est exactement égal au polynôme minimal $m_A(X)$ de $A$.*

*On peut donc énoncer.*

**Théorème 4.0.2** *L'endomorphisme $f$ est **diagonalisable** dans $\mathbb{K}$ si et seulement si, son polynôme minimal $m_f(X)$ est **scindé simple** dans $\mathbb{K}$.*

## 4.1 Propriétés des polynômes d'endomorphismes

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini $n \neq 0$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$.

**Proposition 4.1.1** *Soient $P$, $Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors on a*

$$(P\,Q)(f) = P(f)\,Q(f) = Q(f)\,P(f)$$

Preuve
il suffit d'utiliser le morphisme $\psi$ et la commutativité de l'anneau $\mathbb{K}[X]$. Le résultat suivant nous sera utile

**Lemme 4.1.1** *Soient $P_1$, $P_2, \ldots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes 2 **à** 2 **premiers entre eux** ($k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$). On pose $P = P_2 \ldots P_k$. Alors les polynômes $P_1$ et $P$ sont premiers entre eux.*

Preuve
Supposons les polynômes $P_1$, $P_2, \ldots, P_k \in \mathbb{K}[X]$, 2 à 2 premiers entre eux. Soit $T(X)$ un

diviseur commun de $P_1$ et $P = P_2 \dots P_k$. On peux supposer que $T(X)$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ (sinon, prendre une composante irréductible de $T(X)$). Ainsi $T(X)$ est un polynôme irréductible qui divise $P_2 \dots P_k$. Nécessairement, $T(X)$ divise l'un des polynômes $P_j, \quad j \in [[2,k]]$. Comme $pgcd(P_1, P_i) = 1$ pour tout $i \in [[2,k]]$ Alors $T(X)$ est un polynôme constant, non nul. Donc les polynômes $P_1$ et $P = P_2 \dots P_k$ sont premiers entre eux.

**Théorème 4.1.1** *Soient $P$, $Q \in \mathbb{K}[X]$.*
*Si $P$ et $Q$ sont* ***premiers entre eux*** *alors la somme $\ker P(f) + \ker Q(f)$ est directe et égale à $\ker(P(f)\,Q(f))$ autrement dit, on a*

$$\ker(P(f)\,Q(f)) = \ker P(f) \oplus \ker Q(f).$$

Preuve
Supposons $P$ et $Q$ sont premiers entre eux.
Montrons d'abord que la somme $\ker P(f) + \ker Q(f)$ est directe. Il suffit de prouver que

$$\ker P(f) \cap \ker Q(f) = \{0\}.$$

Soit $x \in \ker P(f) \cap \ker Q(f)$. Comme $P$ et $Q$ sont premiers entre eux, d'après l'identité de Bézout, il existe $U(X)$, $V(X) \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$U(X)\,P(X) + V(X)\,Q(X) = 1.$$

On en déduit que

$$U(f)\,P(f) + V(f)\,Q(f) = id_E.$$

On a alors

$$U(f)\,P(f)(x) + V(f)\,Q(f)(x) = id_E(x) = x \qquad (*)$$

Comme $x \in \ker P(f)$ alors $P(f)(x) = 0$ et comme $x \in \ker Q(f)$ alors $Q(f)(x) = 0$. La relation $(*)$ implique que $x = 0$. D'où $\ker P(f) \cap \ker Q(f) = \{0\}$.
La somme $\ker P(f) + \ker Q(f)$ est donc directe.

Montrons à présent que $\ker(P(f)\,Q(f)) = \ker P(f) + \ker Q(f)$.

Soit $x \in \ker P(f) + \ker Q(f)$. Il existe $x_1 \in \ker P(f)$ et $x_2 \in \ker Q(f)$ tels que

$$x = x_1 + x_2.$$

On a alors

$$P(f)\,Q(f)(x) = P(f)\,Q(f)(x_1) + P(f)\,Q(f)(x_2)$$

Or

$$P(f)\,Q(f)(x_1) = Q(f)\,(P(f)(x_1)) = Q(f)(0) = 0$$

et
$$P(f)\,Q(f)(x_2) = P(f)(Q(f)(x_2)) = P(f)(0) = 0.$$
Par conséquent $P(f)\,Q(f)(x) = 0$ d'où $x \in \ker(P(f)\,Q(f))$ et
$$\ker P(f) + \ker Q(f) \subset \ker(P(f)\,Q(f)).$$
Soit $x \in \ker(P(f)\,Q(f)$. Alors $P(f)\,Q(f)(x) = 0$ et $Q(f)\,P(f)(x) = 0$.
D'après la relation $(*)$ on a
$$U(f)\,P(f)(x) + V(f)\,Q(f)(x) = x.$$
Posons
$$v_1 = U(f)\,P(f)(x) \quad \text{et} \quad v_2 = V(f)\,Q(f)(x).$$
Alors $Q(f)(v_1) = 0$ et $P(f)(v_2) = 0$. Donc $v_1 \in \ker Q(f)$ et $v_2 \in \ker P(f)$ et $x = v_1 + v_2 \in \ker P(f) + \ker Q(f)$. D'où
$$\ker(P(f)\,Q(f) \subset \ker P(f) + \ker Q(f).$$
On a donc $\ker(P(f)\,Q(f)) = \ker P(f) + \ker Q(f)$. En somme
$$\ker(P(f)\,Q(f)) = \ker P(f) \oplus \ker Q(f).$$
cqfd.

**Corollaire 4.1.1** *Soient $P_1,\, P_2, \ldots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes* 2 ***à*** 2 ***premiers entre eux*** *($k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$). Pour tout $i = 1, \ldots, k$, on pose $u_i = P_i(f)$. Alors*
*la somme $\sum_{i=1}^{k} \ker u_i$ est une somme directe de sous-espaces vectoriels de $E$ et est égale à $ker(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k)$. Autrement dit, on a*
$$ker(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k) = \ker u_1 \oplus \ker u_2 \oplus \cdots \oplus \ker u_k.$$

Preuve
Par récurrence sur $k$.
C'est vrai pour $k = 2$ (voir le théorème 4.1.1).
Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $k$ et montrons que c'est vrai au rang $k + 1$. Soient $P_1,\, P_2, \ldots, P_{k+1} \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes, 2 à 2 premiers entre eux. Posons $P = P_1\,P_2 \ldots P_k$ et $Q = P_{k+1}$. D'après le lemme 4.1.1, les polynômes $P = P_1\,P_2 \ldots P_k$ et $Q = P_{k+1}$ sont premiers entre eux. D'après le théorème 4.1.1, on a
$$\ker\,(P(f)P_{k+1}(f)) = \ker\; P(f) \oplus \ker P_{k+1}(f) \qquad (*).$$
On sait par ailleurs que
$$P(f) = (P_1\,P_2 \ldots P_k)(f) = P(f)\,P_2(f) \ldots P_k(f).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\ker(P(f)\, P_2(f) \ldots P_k(f)) = \ker\, P_1(f) \oplus \ldots \oplus \ker\, P_k(f).$$

C'est à dire que

$$ker(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k) = \ker u_1 \oplus \ker u_2 \oplus \cdots \oplus \ker u_k \qquad (**).$$

D'après $(*)$ et $(**)$, on a

$$ker(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k \circ u_{k+1}) = \ker u_1 \oplus \ker u_2 \oplus \cdots \oplus \ker u_k \oplus \ker u_{k+1}.$$

C'est donc vrai pour $k+1$. D'où le résultat.
cqfd.

**Corollaire 4.1.2** *Soient $P_1$, $P_2, \ldots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes 2* ***à*** *2* ***premiers entre eux*** *($k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$). Pour tout $i = 1, \ldots, k$, on pose $u_i = P_i(f)$.*

$$Si \quad u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_k = 0 \quad alors \quad E = \ker u_1 \oplus \ker u_2 \oplus \cdots \oplus \ker u_k.$$

Preuve (euuh ! laissée au lecteur).

**Corollaire 4.1.3** *Soit $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{m_i}$, les $\lambda_i$, $i = 1, \ldots, k$ étant 2 à 2 distincts et $m_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, \ldots, k$.*

$$Si \quad Q(f) = 0 \quad alors \quad E = \ker(f - \lambda_1\, id_E)^{m_i} \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_k\, id_E)^{m_k}.$$

## 4.2 Sous-espaces caractéristiques

Par la suite, tous les polynômes caractéristiques considérés seront supposés scindés sur le corps $\mathbb{K}$.

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Le polynôme caractéristique de $f$ est de la forme

$$P_f(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$$

où les $\lambda_i$, $i = 1, \ldots, k$ sont les valeurs propres, 2 à 2 distinctes de $f$ et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, \ldots, k$ la multiplicité de la valeur propre $\lambda_i$, avec $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$.

**Définition 4.2.1** *Le* ***sous-espace caractéristique*** *de $f$ associé à la valeur propre $\lambda_i$, souvent noté $C_{\lambda_i}$ ou $N_{\lambda_i}$, est par définition le noyau de l'endomorphisme $(f - \lambda_i\, id_E)^{\alpha_i}$, c'est à dire*

$$C_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i\, id_E)^{\alpha_i}.$$

**Théorème 4.2.1** *L'espace vectoriel $E$ est somme directe des sous-espaces caractéristiques de $f$. Autrement dit, on a toujours l'égalité*

$$E = \ker(f - \lambda_i\, id_E)^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_i\, id_E)^{\alpha_k}.$$

Preuve
D'après le théorème de Caley-Hamilton, on a $P_f(f) = 0$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 4.1.3.

**Remarque 4.2.1** *Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$\ker(f - \lambda\, id_E) \subseteq \ker(f - \lambda\, id_E)^m$$

*En particulier, le sous espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda_i$ est contenu dans le sous espace caractéristique de $f$ associé à $\lambda_i$, c'est à dire que*

$$\ker(f - \lambda\, id_E) \subseteq \ker(f - \lambda_i\, id_E)^{\alpha_i}.$$

**Proposition 4.2.1** *Les racines du polynôme minimal de $f$ sont exactement les valeurs propres de $f$. autrement dit, le polynôme caractéristique $P_f(X)$ de $f$ et le polynôme minimal $m_f(X)$ de $f$ ont les mêmes racines.*

Preuve
Soit

$$P_f(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$$

le polynôme caractéristique de $f$, où les $\lambda_i$, $i = 1, \ldots, k$ sont les valeurs propres, 2 à 2 distinctes de $f$ et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, \ldots, k$ la multiplicité de la valeur propre $\lambda_i$. On sait que le polynôme minimal $m_f(X)$ de $f$ divise son polynôme caratéristique. Donc $m_f(X)$ est de la forme $m_f(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ avec

$$0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$$

Il suffit donc de prouver que

$$\beta_i \geq 1$$

pour tout $i = 1, \ldots, k$.
On peut écrire $m_f(X)$ sous la forme

$$m_f(X) = X^p + a_{p-1}\, X^{p-1} + \ldots + a_1\, X + a_0$$

avec $p = \sum_{i=1}^{k} \beta_i$. Rappelons que $m_f(f) = 0$. On a

$$m_f(f) = f^p + a_{p-1}\, f^{p-1} + \cdots + a_1\, f + a_0\, id_E \qquad (*)$$

Soit $x \in E, x \neq 0$, un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda \in$ Spec(f). On a

$$f^j(x) = \lambda^j\, x$$

pour tout entier $j \in \mathbb{N}$. D'après la relation $(*)$ on a

$$f^p(x) + a_{p-1}\, f^{p-1}(x) + \cdots + a_1\, f(x) + a_0\, id_E(x) = 0$$

Donc

$$\lambda^p\, x + a_{p-1}\, \lambda^{p-1}\, x + \cdots + a_1\, \lambda\, x + a_0\, x = 0$$

On déduit que

$$(\lambda^p\ + a_{p-1}\, \lambda^{p-1}\ + \cdots + a_1\, \lambda\ + a_0\,)\, x = 0$$

c'est à dire que

$$m_f(\lambda)\, x = 0$$

comme $x$ est un vecteur non nul de $E$ alors $m_f(\lambda) = 0$. D'où $\lambda$ est racine du polynôme minimal $m_f(X)$ de $f$. En somme on a

$$\beta_i \geq 1$$

pour tout $i = 1, \ldots, k$.
cqfd.

**Proposition 4.2.2** *Soit $P_f(X) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ le **polynôme caractéristique** de $f$, où les $\lambda_i$, $i = 1, \ldots, k$ sont les valeurs propres, 2 à 2 distinctes de $f$ et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, \ldots, k$ la multiplicité de la valeur propre $\lambda_i$, et $m_f(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{\beta_i}$ le **polynôme minimal** de $f$. Alors on a*

$$\ker(f - \lambda_i\ id_E)^{\beta_i} = \ker(f - \lambda_i\ id_E)^{\alpha_i}$$

*pour tout $i = 1, \ldots, k$.*

Preuve
Posons

$$M_i = \ker(f - \lambda_i\, id_E)^{\beta_i} \quad \text{et} \quad N_i = \ker(f - \lambda_i\, id_E)^{\alpha_i}$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$.
Rappelons que $P_f(f) = 0$ et $m_f(f) = 0$. Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\beta_i}$, $i = 1, \ldots, k$ étant 2 à 2 premiers entre eux, on a, d'après le corolaire 4.1.3

$$E = \ker(f - \lambda_1\, id_E)^{\beta_1} \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_k\, id_E)^{\beta_k}$$

c'est à dire

$$E = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k \qquad (1)$$

On sait que

$$E = \ker(f - \lambda_1\, id_E)^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_k\, id_E)^{\alpha_k}$$

c'est à dire

$$E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k \qquad (2)$$

Pour tout $i = 1, \ldots, k$ on a

$$M_i \subset N_i \qquad (3)$$

car $\beta_i \leq \alpha_i$. Ainsi, $\dim M_i \leq \dim N_i$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. D'après les relations (1) et (2) on a

$$\sum_{i=1}^{k} \dim M_i = n = \sum_{i=1}^{k} \dim N_i.$$

On a alors

$$\sum_{i=1}^{k} (\dim N_i - \dim M_i) = 0.$$

Ce qui est une somme finie d'entiers naturels.Nécessairement, on a

$$\dim M_i = \dim N_i$$

pour tout entier $i = 1, \ldots, k$ et la relation (3) implique que $M_i = N_i$ pour tout $i = 1, \ldots, k$.
cqfd.

**Exercice**
Montrer que pour tout entier $m \geq \beta_i$ on a

$$\ker(f - \lambda_i\, id_E)^m = \ker(f - \lambda_i\, id_E)^{\beta_i}.$$

## 4.3 Propriétés des sous-espaces caractéristiques

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Soit $P_f(X)$ le polynôme caractéristique de $f$. On sait que $P_f(X)$ s'écrit

$$P_f(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$$

où les $\lambda_i$, $i = 1, \ldots, k$ sont les valeurs propres, 2 à 2 distinctes de $f$ et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, \ldots, k$, la multiplicité de la valeur propre $\lambda_i$, avec $\sum_{i=1}^k \alpha_i = n$. Soit

$$m_f(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

le polynôme minimal de $f$. On pose

$$N_i = \ker(f - \lambda_i \; id_E)^{\alpha_i}$$

pour tout $i = 1, \ldots, k$.

Pour tout $i = 1, \ldots, k$, on note $f_i$ la restriction $f_{/N_i}$ de $f$ au sous-espace $N_i$.

**Théorème 4.3.1** *La dimension du sous-espace caractéristique $N_i$ de $f$ associé à la valeur propre $\lambda_i$ est égale à l'ordre de multiplicité $\alpha_i$ de la valeur propre $\lambda_i$ dans le polynôme caractéristique de $f$, c'est à dire que*

$$\dim N_i = \alpha_i$$

*pour tout $i = 1, \ldots, k$.*

Preuve
Posons $d_i = \dim N_i$ pour tout tout $i = 1, \ldots, k$. On rappelle que $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $N_i$, $\quad i = 1, \ldots, k$. Alors $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ est une base de $E$. La matrice $M$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme (attention à l'ordre !) :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & O & \ldots & O \\ O & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \ldots & O & A_k \end{pmatrix} \qquad (*)$$

où chaque $A_i$ est une matrice carrée d'ordre $d_i$.

On a

$$M - X\, I_n = \begin{pmatrix} A_1 - X\, I_{d_1} & O & \ldots & O \\ O & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \ldots & O & A_k - X\, I_{d_k} \end{pmatrix}$$

$P_f(X) = \det(M - X\, I_n) = \prod_{i=1}^k \det(A_i - X\, I_{d_i})$. Or $\det(A_i - X\, I_{d_i})$ est le polynôme carac téristique de l'endomorphisme $f_i = f_{/N_i}$ donc $\det(A_i - X\, I_{d_i}) = (\lambda_i - X)^{d_i}$ et

$$P_f(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{d_i}$$

On a nécessairement $d_i = \alpha_i$ pour tout entier $i = 1, \ldots, k$. Donc $\dim N_i = \alpha_i$ pour tout $i = 1, \ldots, k$.
cqfd.

**Remarque 4.3.1** *La forme matricielle* $(*)$ *de la preuve précédente est appelée la réduction de* $f$ *suivant ces sous-espaces vectoriels caractéristiques.*

**Proposition 4.3.1** *Pour tout* $i = 1, \ldots, k$*, le sous-espace caractéristique* $N_i$ *est stable par* $f$*, c'est à dire que*

$$\forall\, x \in N_i, \quad f(x) \in N_i.$$

*En particulier,* $f_i : N_i \longrightarrow N_i$ *est un endomorphisme de* $N_i$*.*

Preuve (exercice !)

**Théorème 4.3.2** *Pour tout* $i = 1, \ldots, k$*, le polynôme minimal de l'endomorphisme* $f_i$ *est*

$$m_{f_i}(X) = (X - \lambda_i)^{\beta_i}.$$

Rappelons que $N_i = \ker(f - \lambda_i\, id_E)^{\alpha_i} = \ker(f - \lambda_i\, id_E)^{\beta_i}$ Alors pour tout $x \in N_i$, on a $(f_i - \lambda_i\, id_E)^{\beta_i}(x) = 0$. Donc le polynôme $(X - \lambda_i)^{\beta_i}$ est un polynôme annulateur de $f_i$. Par conséquent, $\lambda_i$ est l'unique valeur propre de $f_i$ et le polynôme minimal $m_{f_i}(X)$ de $f_i$ associé à cette valeur propre $\lambda_i$ divise donc $(X - \lambda_i)^{\beta_i}$. Il est donc de la forme

$$m_{f_i}(X) = (X - \lambda_i)^{\theta_i}$$

avec $\theta_i \leq \beta_i, \quad \theta_i \in \mathbb{N}^*$.
Montrons à présent que $\forall\, i = 1, \ldots, n, \quad \theta_i = \beta_i$.

Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $p \in [[1, k]]$ tel que $\theta_p < \beta_p$. Considérons le polynôme

$$R(X) = (X - \lambda_p)^{\theta_p} \prod_{i=1,\, i \neq p}^{k} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

On a

$$R(f) = (f - \lambda_p\, id_E)^{\theta_p} \prod_{i=1,\, i \neq p}^{k} (f - \lambda_i\, id_E)^{\beta_i}$$

L'endomorphisme $(f - \lambda_p\, id_E)^{\theta_p}$ s'annule en tout point de $N_p$ et pour tout $i \in [[1, k]]$, l'endomorphisme $(f - \lambda_i\, id_E)^{\beta_i}$ s'annule en tout point de $N_i$.
Soit $x \in E$. D'après le théorème 4.2.1, $x$ s'écrit de façon unique

$$x = x_1 + \cdots + x_k$$

avec $x_i \in N_i$.

Déterminons $R(f)(x)$.

Il est clair que

$$R(f)(x) = R(f)(x_i) + \cdots + R(f)(x_k)$$

Nous allons distinguer 2 cas pour le calcul de $R(f)(x_j), \quad j = 1, \ldots, k$.

**1er cas** : $j = p$

On a

$$R(f)(x_p) = [(f - \lambda_p\, id_E)^{\theta_p} \prod_{i=1,\, i\neq p}^{k} (f - \lambda_i\, id_E)^{\beta_i}](x_p).$$

Comme les polynômes d'endomorphismes de $f$ commutent entre eux, on a

$$R(f)(x_p) = (\prod_{i=1,\, i\neq p}^{k} (f - \lambda_i\, id_E)^{\beta_i})(f - \lambda_p\, id_E)^{\theta_p}(x_p) = 0$$

car $x_p \in \ N_p$.

**2ème cas** : $j \neq p$

On a $R(f)(x_j) = [(f - \lambda_p\, id_E)^{\theta_p} \prod_{i=1,\, i\neq p}^{k} (f - \lambda_i\, id_E)^{\beta_i}](x_j)$. Comme

$$R(f) = (f - \lambda_p\, id_E)^{\theta_p}[\prod_{i=1,\, i\neq p,\, i\neq j}^{k} (f - \lambda_i\, id_E)^{\beta_i}](f - \lambda_j\, id_E)^{\beta_j}$$

alors $R(f)(x_j) = 0$ car $x_j \in N_j$.

En somme, pour tout $j = 1, \ldots, k$ on a $R(x_j) = 0$. Par conséquent $R(f)(x) = 0$ pour tout $x \in E$. D'où $R(f) = 0$, c'est à dire que le polynôme $R(X)$ est annulateur de $f$. Il est donc divisible par le polynôme minimal de $f$. Ceci est contradictoire au regard de l'expression de $R(X)$. On a donc $\theta_i = \beta_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Le polynôme minimal de $f_i$ est donc

$$m_{f_i}(X) = (X - \lambda_i\, id_E)^{\beta_i}.$$

## 4.4 Forme réduite de Jordan

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

**Définition 4.4.1** *Une matrice carrée $M$ d'ordre $n$ est appelée* ***matrice de Jordan*** *si il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que*

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

*avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$.*

On retiendra le résultat important suivant

**Théorème 4.4.1** ***(Théorème de Jordan)*** *Toute matrice carrée $A$ d'ordre $n$ triangularisable est semblable à une matrice de la forme*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & O & \dots & O \\ O & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \dots & O & J_k \end{pmatrix}$$

*où chaque $J_i$ est matrice de Jordan. Cette forme est appelée forme* ***réduite de jordan*** *de la matrice $A$*

A suivre!!!!

# Exercices

**Exercice 0**
Diagonaliser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

**Exercice 1**
1) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme $\psi$ de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\psi(P) = P^{'}$.

2) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme $\varphi : C^{\infty}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(f) = f^{'}$.

3) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme $\phi$ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\phi(P) = (2\,X + 1)\,P + (1 - X^2)\,P^{'}$$

**Exercice 2**
Soit $a$ un réel. À tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}[X]$, on associe $\phi(P)$ défini par :

$$\phi(P)(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x P(t)\,dt$$

1) Prouver que, pour tout entier $n \geq 0$, $\phi$ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Montrer que cet endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonalisable.

**Exercice 3**
1) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall\, i \in [[1, n]], \qquad \sum_{1 \leq j \leq n,\, i \neq j} |a_{ij}| < |a_{ij}| \qquad (1)$$

(Une telle matrice est appelée matrice à diagonale strictement dominante.)
Montrer que $A$ est inversible.
(Ce résultat est connu sous le nom de **Théorème d'Hadamard**)

2) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall\, i \in [[1, n]], \qquad \sum_{1 \leq j \leq n,\, i \neq j} |a_{ij}| < |a_{ii} - \lambda|$$

Montrer que $\lambda$ n'est pas valeur propre de $A$.

**Exercice 4**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Montrer que $A$ est diagonalisable et, lorsque $k \in \mathbb{N}$, calculer $A^k$ de deux manières différentes.

**Exercice 5**

Soit $K$ un corps commutatif et $A \in \mathcal{M}_2(K)$.
1) Montrer que

$$A^2 - (trA)\, A + (\det A)\, I_2 = 0.$$

2) En déduire que :

i) $\det A = \frac{1}{2}[(trA)^2 - trA^2]$.

ii) Si $trA \neq 0$, alors toute matrice qui commute avec $A^2$ commute aussi avec $A$.

**Exercice 6**

On considère la matrice carrée réelle $A$ suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1) Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{A^n}{n!}$$

i) Déterminer l'expression matricielle explicite de $S_p$ pour $p \in \mathbb{N}$.

ii) En déduire la limite suivante

$$S = \lim_{p \to +\infty} S_p$$

(on rappelle que, pour tout nombre réel $x$, on a : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$).

**Exercice 7**
Montrer que les suites réelles $(x_n)$, $(y_n)$, $(z_n)$ définies par leurs premiers termes $x_0$, $y_0$, $z_0$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\, x_n + \frac{1}{4}\, y_n + \frac{1}{4}\, z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}\, x_n + \frac{1}{2}\, y_n + \frac{1}{4}\, z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}\, x_n + \frac{1}{4}\, y_n + \frac{1}{2}\, z_n \end{cases}$$

sont toujours convergentes et exprimer leurs limites en fonction de $x_0$, $y_0$, $z_0$.

**Exercice 8**
Soit $m$ un nombre réel et f l''endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1) Quelles sont les valeurs propres de $f$ ?
2) Pour quelles valeurs de $m$ l'endomorphisme est-il diagonalisable ?

**Exercice 9**
Soit $f : E \longrightarrow E$un endomorphisme du $K$-espace vectoriel $E$ tel que $f^3 = id_E$. Montrer que

$$E = \ker(f - id_E) \oplus \ker(f^2 + f + id_E)$$

**Exercice 10**
Soit un entier $n \leq 2$ et $M$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$M^3 = 2\, M^2 - M$$

1) Quelles sont les valeurs propres possibles de M ?
2) Montrer que $M$ est diagonalisable si, et seulement si

$$rg(M - I_n) = rg(M^2 - 2\, M + I_n)$$

**Exercice 11**
Soit $\alpha$ un nombre réel non nul. On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \alpha \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Justifier qu'elle est trigonalisable dans

$\mathbb{R}$ ?
2) Déterminer une base $(V_1, V_2, V_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$A\,V_1 = -V_1, \quad A\,V_2 = V_1 - V_2, \quad A\,V_3 = V_2 - V_3$$

Calculer $A^n$ pour tout entier $n$ de $\mathbb{Z}$.

**Exercice 12**
Dites si les matrices à coéfficients réels suivantes sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$. Sinon les trigonaliser si possible :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 13**
On considère la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}J \\ \frac{1}{2}J & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $M^2$ et $M^3$. En déduire que $M$ est diagonalisable.
2) Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de $M$.
3) Déterminer $M^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, puis

$$e^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} M^n.$$

**Exercice 14**
Soient $A, B \in M_n(K)$ où $K$ est un corps commutatif. On se propose de montrer que $AB$ et $BA$ ont le même polynôme caractéristique (et donc les mêmes valeurs propres).
Soient $A^\lambda$, $B^\lambda, (\lambda \in K)$ les matrices par blocs de $M_{2n}(K)$ :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} A & \lambda I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \; B_\lambda = \begin{pmatrix} B & -\lambda I_n \\ -I_n & A \end{pmatrix}$$

1) Calculer $A^\lambda B^\lambda$ et $B^\lambda A\lambda$ (Faire les produits par blocs).
2) Calculer $\det(A_\lambda B_\lambda)$ et $\det(B_\lambda A_\lambda)$. En déduire que $P_{AB} = P_{BA}$.
3) Montrer que si $f$ et $g$ sont deux endomorphismes dun $K$-espace vectoriel de dimension finie, alors $f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même polynôme caractristique (donc les mêmes valeurs propres).

**Exercice 15** Résoudre le système d'équations différentielles linéaires suivant dinconnues les fonctions $x$, $y$, $z$ de la variable $t$ :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2\,y - z \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 2x + y - z + \sin t \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = -x - z + 4z - \cos t \end{cases}$$

# QUELQUES SUJETS

**Sujet 1**

**Durée : 2 h 40 mn**
**NB : la clarté de la rédaction sera notée !**

**Devoir (Réduction des Endomorphismes)**

**Exercice 1** (*Questions de cours*) (**6 points**)
Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, unitaire et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$ dont la matrice dans une base de $E$ est $A \in M_n(\mathbb{K})$.

a) Rappeler la définition de vecteur propre de f.

b) Enoncer 2 conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisation de A.

c) Enoncer une condition suffisante mais non-nécessaire de diagonalisation de A.

d) Enoncer une condition nécessaire mais non-suffisante de diagonalisation de A.

**Exercice 2** (**6,5 points**)
On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $P(X) \longmapsto 2P(X) + X\,P'(X)$.
1) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\varphi$.

**Exercice 3** (**7,5 points**)
On considère la matrice carrée réelle $A$ suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{A^n}{n!}$$

i) Déterminer l'expression matricielle explicite de $S_p$ pour $p \in \mathbb{N}$.

ii) En déduire la limite suivante

$$S = \lim_{p \to +\infty} S_p$$

(on rappelle que, pour tout nombre réel $x$, on a : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$).

## Sujet 2

**Durée : 2 heures**
**NB : la clarté de la rédaction sera notée !**

**Examen de deuxième Session**
(**Réduction des endomorphismes**)

**Exercice 1** (*Questions de cours*)
Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, unitaire et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$ dont la matrice dans une base de $E$ est $A \in M_n(\mathbb{K})$.

a) Rappeler la définition de vecteur propre de f.

b) Enoncer 4 conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisation de A.

c) Enoncer une condition suffisante mais non-nécessaire de diagonalisation de A.

d) Enoncer une condition nécessaire mais non-suffisante de diagonalisation de A.

**Exercice 2**
On considère la matrice **réelle** $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $B^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(On rappelle que pour tout nombre réel $\theta$ on a $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$).

2) Donner une expression matricielle explicite de la matrice suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} B^k$$

où $n \in \mathbb{N}$ (on convient que $B^0 = I_2$).

**Exercice 3**
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et, $A$ la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a & 1 \\ 1-b & a & a-1 & -b \\ b & -a & 1-a & 1+b \\ 0 & a & a & 0 \end{pmatrix}$$

1) A quelles conditions sur $a$ et $b$, la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

2) On suppose $a = 0$ et $b = 0$.

i) Justifier que $A(A - I) = 0$.

ii) En déduire $A^n$, $n \in \mathbb{N}$ et $(A + I)^{-1}$.

## Sujet 3

**Durée : 2 h 40 mn**
**NB : la clarté de la rédaction sera notée !**

## Devoir (Réduction des Endomorphismes)

**Exercice 1** (*Questions de cours*) (**6 points**)
Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, unitaire et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$ dont la matrice dans une base de $E$ est $A \in M_n(\mathbb{K})$.

a) Rappeler la définition de vecteur propre de f.

b) Enoncer 2 conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisation de A.

c) Enoncer une condition suffisante mais non-nécessaire de diagonalisation de A.

d) Enoncer une condition nécessaire mais non-suffisante de diagonalisation de A.

**Exercice 2** (**6,5 points**)
On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $P(X) \longmapsto 2P(X) + X\,P'(X)$.
1) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\varphi$.

**Exercice 3** (**7,5 points**)
On considère la matrice carrée réelle $A$ suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{A^n}{n!}$$

i) Déterminer l'expression matricielle explicite de $S_p$ pour $p \in \mathbb{N}$.

ii) En déduire la limite suivante

$$S = \lim_{p \to +\infty} S_p$$

(on rappelle que, pour tout nombre réel $x$, on a : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$).

**Sujet 4**

Durée : **2 h 05 mm**
**NB : la clarté de la rédaction sera notée !**

**Examen (Reduction des Endomorphismes)**
(*Première Session*)

**Exercice 1** (**6 points**) (*Questions de cours*)

Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$ dont la matrice dans une base de $E$ est $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Enoncer 4 conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisation de A.

2) Prouver que si $A^2 - 3\,A + 2\,I_n = 0$ alors $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 2** (**7 points**)

On considère la matrice réelle $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $B^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2) Donner une expression matricielle explicite de la matrice suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} B^k$$

où $n \in \mathbb{N}$ (on convient que $B^0 = I_2$).

**Exercice 3** (**7 points**)

Montrer que les suites réelles $(x_n)$, $(y_n)$, $(z_n)$ définies par leurs premiers termes $x_0$, $y_0$, $z_0$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\,x_n + \frac{1}{4}\,y_n + \frac{1}{4}\,z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}\,x_n + \frac{1}{2}\,y_n + \frac{1}{4}\,z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}\,x_n + \frac{1}{4}\,y_n + \frac{1}{2}\,z_n \end{cases}$$

sont toujours convergentes et exprimer leurs limites en fonction de $x_0$, $y_0$, $z_0$.

## Sujet 5

**Durée : 3 heures**
**NB : la clarté de la rédaction sera notée !**

**Examen - Sesion 1**
**(Réduction des Endomorphismes)**

**Exercice 1** (3 points)
1) Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire bijective. Soit $\lambda \in K$. Monter que si $\lambda$ est une valeur propre de $f$ alors $\lambda \neq 0$ et $\dfrac{1}{\lambda}$ est valeur propre de $f^{-1}$ (la bijection réciproque de $f$).

**Exercice 2** (3 points)
Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $g : E \longrightarrow E$ une application linéaire. On suppose que tout vecteur $v \neq 0$ de $E$ est vecteur propre de $g$.

Montrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in K$ tel que $g = \lambda\, id_E$ où $id_E$ est l'application identité de $E$.

**Exercice 3** (8 points)
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré $\leq n$. Pour tout élément $P(X) \in E$, on pose

$$\varphi(P(X)) = (X^2 - 1)\, P'(X) - n\, X\, P(X)$$

1) Rappeler la dimension de $E$.
2) Prouver que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$
3) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\varphi$

4) Prouver que $\varphi$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

5) Pour $n = 2$ déterminer une base de $E$ formée de vecteurs propres de $\varphi$ ainsi que la matrice $M$ de $\varphi$ dans cette base.

**Exercice 4** (7,5 points)
On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère trois suites réelles $(u_n)$, $(v_n)$, $(w_n)$, $n \geq 0$ vérifiant

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

2) Déterminer les termes généraux de $(u_n)$, $(v_n)$, $(w_n)$, en fonction de $u_0$, $v_0$, $w_0$.

3) A quelles conditions sur $u_0$, $v_0$, $w_0$ ces trois suites sont-elles convergentes ?